受験番号	
氏　　名	

令和８年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻博士課程入学試験問題

物　　理　　学

令和７年８月１９日（火）　１３時３０分～１６時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で３問ある。３問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計３枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号、氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**(物理学)、**受験番号、氏名、問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

以下,

$$V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)$$

の場合を考える。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数で $V_0 > 0$ とする。

4. 位置表示でシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{d^2}{dy^2}\phi(y) + v \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y - n)\phi(y) = \alpha^2 \phi(y) \tag{1}$$

となることを示せ。ただし $y = x/a$, $v = 2maV_0/\hbar^2$, $\alpha^2 = 2mEa^2/\hbar^2$ で E は固有エネルギー, ϕ は固有関数である。

5. $0 < y < 1$ では $V = 0$ であるから式 (1) の解は $\phi(y) = Ae^{i\alpha y} + Be^{-i\alpha y}$ とあらわせる。ここで A および B は適当な係数である。このことと問 3 の結果をあわせ, 特に $y = 0$ における $\phi(y)$ および $\dfrac{d\phi}{dy}$ の接続の条件から

$$\begin{aligned} A + B &= e^{-ik}(\boxed{\quad (a) \quad}) \\ A - B &= e^{-ik}(\boxed{\quad (b) \quad}) + v(\boxed{\quad (c) \quad}) \end{aligned}$$

という形の式が得られる。(a), (b), (c) にあてはまる式を A, B, α を使ってあらわせ。

6. 問 5 の結果を用いて

$$\cos k = \cos\alpha + \frac{v}{2\alpha}\sin\alpha \tag{2}$$

を示せ。

7. $v = 0$ のとき, l を整数として $\alpha = k + 2\pi l$, つまり $E = \hbar^2(k + 2\pi l)^2/2ma^2$ となる。ここで小さな v ($v \ll 1$) を導入し, E が $k = \pi$ でどのように変化するかを考えよう。$\alpha = \pi(2l + 1)$ は式 (2) の解であるが, $\alpha = \pi(2l + 1) + \delta$ という解も存在する。ただし δ はゼロでない実数である。δ を求め, v の導入によって E がどのように変化するかを議論せよ。ただし, δ が小さいとき

$$\begin{aligned} \cos(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -1 + \frac{\delta^2}{2} \\ \sin(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -\delta \end{aligned}$$

としてよい。

とする。このとき，行列 M の 2 乗 M^2 の成分 $(M^2)_{1,1}, (M^2)_{1,-1}, (M^2)_{-1,1}, (M^2)_{-1,-1}$ は

$$(M^2)_{\sigma_1,\sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm1} M_{\sigma_1,\sigma_2} M_{\sigma_2,\sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm1} \exp\left[\beta u \sum_{i=1}^{2} \sigma_i\sigma_{i+1} + \beta ha \sum_{i=1}^{3} \sigma_i - \boxed{}\right]$$

と書ける。ここで $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ である。$\boxed{}$を埋めよ。

4. この系の分配関数は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm1,\sigma_N=\pm1} (M^{N-1})_{\sigma_1,\sigma_N} \exp\left[\boxed{}\right]$$

と書ける。$\boxed{}$を埋めよ。

5. 棒粒子 1 つあたりの自由エネルギー

$$f(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{-k_\mathrm{B}T \ln Z}{N}$$

を求めよ。ただし，必要に応じて行列 M の固有値

$$\lambda_\pm = e^{\beta u}\cosh(\beta ha) \pm \sqrt{e^{2\beta u}\sinh^2(\beta ha) + e^{-2\beta u}}$$

を用いてよい。

6. $f(h)$ を $h=0$ の付近で βha の 2 次まで展開した表式を求めよ。ただし，小さい δ に対して $\cosh(\delta) \simeq 1 + \delta^2/2$, $\sinh(\delta) \simeq \delta$ となることを用いてよい。

7. r の関数としての自由エネルギー $g(r)$ は逆ルジャンドル変換により

$$g(r) = \min_h \left[f(h) + rah\right] = f(h^*(r)) + rah^*(r)$$

と求まる。ここで，$h^*(r)$ は $ra = -\dfrac{\partial f}{\partial h}$ を満たす h である。問 6 の結果を用いて，$h^*(r)$ を r の最低次の関数として求めよ。

8. 電場がないとき $(h=0)$ に終点を $x = R = Nar$ で固定するために必要な力

$$F = -\frac{1}{a}\frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

を，r が小さいときについて r, T, a, u の関数として求めよ。また，F と問 2 で求めた F_S をそれぞれ R, T, N, a, u の関数として表したとき，F_S の表式において棒粒子の長さ a を実効的な棒粒子の長さ $\tilde{a}$ に置き換えることで F が得られることを示し，u が正の場合，負の場合それぞれについて，$\tilde{a}$ と a の大小関係を答えよ。また，なぜそのようになるか，物理的な解釈を述べよ。

つぎに，図 2 のように，管を支柱の上におき，管が水平面となす角を $\theta(t)$ とする。$t=0$ において $\theta=0$ で静止している状態から，管が水平面に対してゆっくり傾いていく運動を考える。管は支柱の上で滑らないものとする。時刻 t における物体の x 軸上の位置を $x(t)$ とする。$t=0$ において物体も管に対して静止しており，$x=0$, $\dfrac{dx}{dt}=0$ とする。問 4, 5, 6 では，$B=0$ とし，管が水平面内では回転しないものとせよ。以下の設問に答えよ。

4. 支点を通り，x 軸に垂直な軸の周りの物体の慣性モーメントを m, M, a, Q, x の中から必要なものを用いて表せ。

5. $|\theta| \ll 1$, かつ $|x| \ll a$ である場合を考える。このとき，$\cos\theta \simeq 1$ かつ $a \pm x \simeq a$ と近似して，管の θ 方向の運動方程式を解き，$\theta(t)$ を Q, m, M, g, a, t の中から必要なものを用いて表せ。

6. 問 5 のとき，x 方向の物体の運動方程式を解き，時刻 t における x を Q, m, M, g, a, t の中から必要なものを用いて表せ。ただし，$\sin\theta \simeq \theta$ と近似してよい。

7. 磁束密度の大きさ B がゼロでない場合，管は鉛直面内で傾き始めると共に，水平面内において回転を始める。時刻 $t=0$ での管の水平面内での向きを基準として，時刻 t における水平面内の管の回転角を $\phi(t)$ で表すものとする。このとき，$|\theta| \ll 1$, $|x| \ll a$ の場合に，$\phi(t) \propto t^n$ と表される。n の値を求めよ。

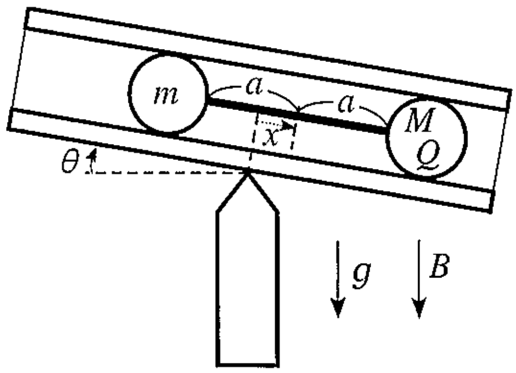

図 2: 支柱の上におかれた管の内部の 2 つの結合された質点。管の質量・太さ・厚みは，いずれも無視できるものとする。