受験番号	
氏　　名	

令和８年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

専　門　科　目

令和７年８月１９日（火）　１３時３０分～１７時３０分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で４問ある。４問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計４枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に**受験番号**、**氏名**を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**（専門科目）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（専門科目）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問

金属中の電子をモデル化した１次元ハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

を考える。ここで p は運動量演算子，m は質量，x は位置の演算子とする。右辺第２項にあらわれるポテンシャル V は a $(a > 0)$ の周期性を持つ。すなわち，

$$V(x) = V(x - a)$$

である。系のサイズを Na とし，波動関数に周期境界条件を課す。ここで N は正の整数である。以下の設問に答えよ。

1. 演算子 X，Y について

$$f(\lambda) = e^{\lambda Y} X e^{-\lambda Y}$$

を考える。$f(\lambda)$ を λ について級数展開することで次式が成立することを示せ。

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \frac{1}{3!}[Y, [Y, [Y, X]]] + \cdots + \frac{1}{n!}\overbrace{[Y, [Y, \cdots, [Y}^{n\text{ 個}}, X]\cdots]] + \cdots$$

ここで演算子の指数関数は

$$\exp[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

で定義するものとし，$[X, Y] = XY - YX$ である。

2. 並進操作を表す演算子を

$$T = \exp(-iap/\hbar)$$

とすると

$$TxT^{-1} = x - a, \quad TpT^{-1} = p$$

が成立することを示せ。ここで i は虚数単位，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

3. $TV(x)T^{-1}$ がどうなるかを考えて T と H が同時対角化できることを示せ。また，T の固有値が e^{-ik}，$k = \dfrac{2\pi j}{N}$ となることを示せ。ただし j は整数である。

以下，

$$V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)$$

の場合を考える。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数で $V_0 > 0$ とする。

4. 位置表示でシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{d^2}{dy^2}\phi(y) + v \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y - n)\phi(y) = \alpha^2 \phi(y) \tag{1}$$

となることを示せ。ただし $y = x/a$，$v = 2maV_0/\hbar^2$，$\alpha^2 = 2mEa^2/\hbar^2$ で E は固有エネルギー，ϕ は固有関数である。

5. $0 < y < 1$ では $V = 0$ であるから式 (1) の解は $\phi(y) = Ae^{i\alpha y} + Be^{-i\alpha y}$ とあらわせる。ここで A および B は適当な係数である。このことと問 3 の結果をあわせ，特に $y = 0$ における $\phi(y)$ および $\dfrac{d\phi}{dy}$ の接続の条件から

$$\begin{aligned} A + B &= e^{-ik}(\boxed{\quad\text{(a)}\quad}) \\ A - B &= e^{-ik}(\boxed{\quad\text{(b)}\quad}) + v(\boxed{\quad\text{(c)}\quad}) \end{aligned}$$

という形の式が得られる。(a)，(b)，(c) にあてはまる式を A，B，α を使ってあらわせ。

6. 問 5 の結果を用いて

$$\cos k = \cos\alpha + \frac{v}{2\alpha}\sin\alpha \tag{2}$$

を示せ。

7. $v = 0$ のとき，l を整数として $\alpha = k + 2\pi l$，つまり $E = \hbar^2(k + 2\pi l)^2/2ma^2$ となる。ここで小さな v ($v \ll 1$) を導入し，E が $k = \pi$ でどのように変化するかを考えよう。$\alpha = \pi(2l + 1)$ は式 (2) の解であるが，$\alpha = \pi(2l + 1) + \delta$ という解も存在する。ただし δ はゼロでない実数である。δ を求め，v の導入によって E がどのように変化するかを議論せよ。ただし，δ が小さいとき

$$\begin{aligned} \cos(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -1 + \frac{\delta^2}{2} \\ \sin(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -\delta \end{aligned}$$

としてよい。

第2問

図1左のように片方の端点 (始点) が $x=0$ に固定され，長さ a の棒粒子が N 個連なってできる1次元の高分子を考える。各棒粒子は右向きか左向きか2状態のうちどちらかのみを取る。R は高分子のもう片方の端点 (終点) の x 座標であり，右向きの棒粒子の数 N_+ と左向きの棒粒子の数 N_- を用いて $R=(N_+-N_-)a$ と表される。この高分子が温度 T の熱浴に接している状況を考える。以下の設問に答えよ。

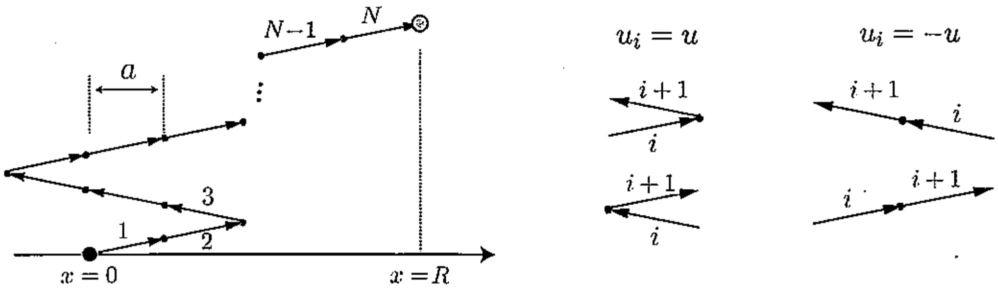

図 1: 左: 1次元高分子モデルの構造。右: 連結部分のエネルギー (問3以降で用いる)。

1. N_+, N_- を指定したときに高分子が取りうる配置の数 $W(N_+, N_-)$ を求め，N, N_+, N_- が十分大きいときのエントロピー $S=k_\mathrm{B}\ln W$ を $r=R/(Na)$ の関数として求めよ。ここで k_B はボルツマン定数である。必要に応じてスターリングの公式 $\ln N! \simeq N\ln N - N$ を用いてよい。

2. 終点を $x=R=Nar$ で固定するために必要な力のうち，エントロピー由来の力
$$F_\mathrm{S}=\frac{T}{Na}\frac{\partial S(r)}{\partial r}$$
を r, T, a の関数として求め，r が小さいときにフックの法則が現れることを示せ。

次に，i 番目の棒粒子と $i+1$ 番目の棒粒子の連結部分のエネルギー u_i を考慮に入れる。連結部分は曲がっている状態とまっすぐな状態とのどちらかを取り，図1右のようにそれぞれのエネルギーは u, $-u$ であるとする。また，高分子の終点には電荷 $+1$ が付加されており，電場 h が x 軸に沿って正の向きにかかっている。i 番目の棒粒子の向きの変数 σ_i を導入し，右向きのとき $\sigma_i=1$，左向きのとき $\sigma_i=-1$ とすると，この高分子のエネルギーは
$$U(\{\sigma\})=-u\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1}-ha\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$
と表され，1次元のイジング模型と等価になる。以下の設問に答えよ。

3. 棒粒子の向きの変数 σ_i, σ_{i+1} に依存する関数 $M_{\sigma_i,\sigma_{i+1}}=\exp[\beta u\sigma_i\sigma_{i+1}+\beta ha(\sigma_i+\sigma_{i+1})/2]$ を使って行列 M を
$$M=\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,-1} \\ M_{-1,1} & M_{-1,-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\beta u+\beta ha} & e^{-\beta u} \\ e^{-\beta u} & e^{\beta u-\beta ha}\end{pmatrix}$$

とする。このとき，行列 M の 2 乗 M^2 の成分 $(M^2)_{1,1}, (M^2)_{1,-1}, (M^2)_{-1,1}, (M^2)_{-1,-1}$ は

$$(M^2)_{\sigma_1,\sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm1} M_{\sigma_1,\sigma_2} M_{\sigma_2,\sigma_3} = \sum_{\sigma_2=\pm1} \exp\left[\beta u \sum_{i=1}^{2} \sigma_i\sigma_{i+1} + \beta h a \sum_{i=1}^{3} \sigma_i - \boxed{}\right]$$

と書ける。ここで $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ である。$\boxed{}$を埋めよ。

4. この系の分配関数は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm1,\sigma_N=\pm1} (M^{N-1})_{\sigma_1,\sigma_N} \exp\left[\boxed{}\right]$$

と書ける。$\boxed{}$を埋めよ。

5. 棒粒子 1 つあたりの自由エネルギー

$$f(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{-k_{\mathrm{B}}T \ln Z}{N}$$

を求めよ。ただし，必要に応じて行列 M の固有値

$$\lambda_\pm = e^{\beta u}\cosh(\beta h a) \pm \sqrt{e^{2\beta u}\sinh^2(\beta h a) + e^{-2\beta u}}$$

を用いてよい。

6. $f(h)$ を $h=0$ の付近で $\beta h a$ の 2 次まで展開した表式を求めよ。ただし，小さい δ に対して $\cosh(\delta) \simeq 1 + \delta^2/2$, $\sinh(\delta) \simeq \delta$ となることを用いてよい。

7. r の関数としての自由エネルギー $g(r)$ は逆ルジャンドル変換により

$$g(r) = \min_h [f(h) + rah] = f(h^*(r)) + rah^*(r)$$

と求まる。ここで，$h^*(r)$ は $ra = -\dfrac{\partial f}{\partial h}$ を満たす h である。問 6 の結果を用いて，$h^*(r)$ を r の最低次の関数として求めよ。

8. 電場がないとき $(h=0)$ に終点を $x = R = Nar$ で固定するために必要な力

$$F = -\frac{1}{a}\frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

を，r が小さいときについて r, T, a, u の関数として求めよ。また，F と問 2 で求めた F_{S} をそれぞれ R, T, N, a, u の関数として表したとき，F_{S} の表式において棒粒子の長さ a を実効的な棒粒子の長さ $\tilde{a}$ に置き換えることで F が得られることを示し，u が正の場合，負の場合それぞれについて，$\tilde{a}$ と a の大小関係を答えよ。また，なぜそのようになるか，物理的な解釈を述べよ。

第3問

図1のように，鉛直な回転軸に水平に固定された管の内部に，質量の異なる2つの質点（それぞれ質量m，Mとする）を質量の無視できる長さ$2a$の棒でつないだ物体をおく。質量Mの質点のみ，電荷Q（$Q>0$）をもつものとする。回転する管が通過する領域には，磁束密度の大きさBの一様な磁場が鉛直下向きにかけられているものとする。図1のように，2つの質点を結ぶ棒の向きにx軸をとり，回転軸に対する棒の中心の座標をxとする。管内部において，物体はx方向と垂直な向きに運動しないものとし，管は充分に長く，物体が管から飛び出すことはないものとする。また，管の質量・太さ・厚み，および管と物体との摩擦は，いずれも無視できるものとする。重力加速度の大きさをgとする。

はじめ，回転軸に対してトルクを与え，上から見て反時計回りに一定の角周波数ωで管を回転させる場合を考える。以下の設問に答えよ。

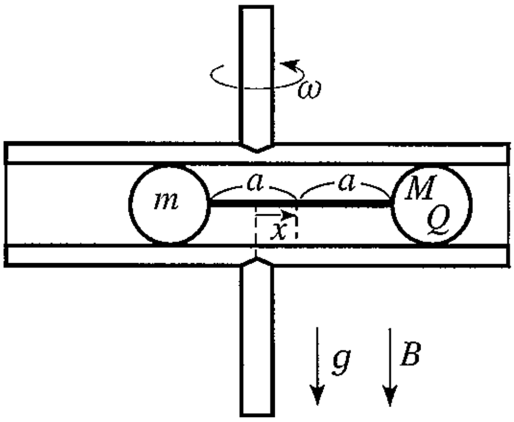

図 1: 回転軸に固定された管の中の2つの結合された質点。

1. 管が一定の角周波数ωで回転しているとき，物体は管内部で動かなかった。このときの物体のx軸上の位置x_0をm，M，a，ω，Q，B，gの中から必要なものを用いて表せ。

2. 問1のとき，回転軸の周りの物体の角運動量の大きさをm，M，ω，B，a，x_0の中から必要なものを用いて表せ。

3. 管の回転を停止し，問1とは異なるx軸上の位置に物体を移動させてから再び管を角周波数ωで回転させたところ，物体はx方向に単振動を始めた。このような振る舞いを示すために必要なm，Mに対する必要十分条件を求めると共に，単振動の角周波数をa，m，M，Q，B，ωの中から必要なものを用いて表せ。

つぎに，図 2 のように，管を支柱の上におき，管が水平面となす角を $\theta(t)$ とする。$t=0$ において $\theta=0$ で静止している状態から，管が水平面に対してゆっくり傾いていく運動を考える。管は支柱の上で滑らないものとする。時刻 t における物体の x 軸上の位置を $x(t)$ とする。$t=0$ において物体も管に対して静止しており，$x=0$, $\dfrac{dx}{dt}=0$ とする。問 4, 5, 6 では，$B=0$ とし，管が水平面内では回転しないものとせよ。以下の設問に答えよ。

4. 支点を通り，x 軸に垂直な軸の周りの物体の慣性モーメントを m, M, a, Q, x の中から必要なものを用いて表せ。

5. $|\theta| \ll 1$, かつ $|x| \ll a$ である場合を考える。このとき，$\cos\theta \simeq 1$ かつ $a \pm x \simeq a$ と近似して，管の θ 方向の運動方程式を解き，$\theta(t)$ を Q, m, M, g, a, t の中から必要なものを用いて表せ。

6. 問 5 のとき，x 方向の物体の運動方程式を解き，時刻 t における x を Q, m, M, g, a, t の中から必要なものを用いて表せ。ただし，$\sin\theta \simeq \theta$ と近似してよい。

7. 磁束密度の大きさ B がゼロでない場合，管は鉛直面内で傾き始めると共に，水平面内において回転を始める。時刻 $t=0$ での管の水平面内での向きを基準として，時刻 t における水平面内の管の回転角を $\phi(t)$ で表すものとする。このとき，$|\theta| \ll 1$, $|x| \ll a$ の場合に，$\phi(t) \propto t^n$ と表される。n の値を求めよ。

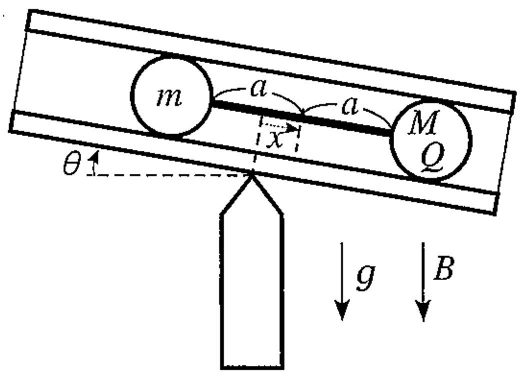

図 2: 支柱の上におかれた管の内部の 2 つの結合された質点。管の質量・太さ・厚みは，いずれも無視できるものとする。

第 4 問

1. ゼロでない実数 $a \in \mathbb{R}$ を用いて $N \times N$ 実行列 $A = (A_{ij})$ $(i, j \in \{1, 2, \cdots, N\})$ を

$$A_{ij} = \begin{cases} a, & i = j+1 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

により定める。このとき以下の設問に答えよ。

(a) $N = 4$ の場合

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

である。このとき A^2, A^3, A^4 を求めよ。

(b) I を $N \times N$ の単位行列とする。$(I - A)^{-1}$ の (i, j) 成分 $((I - A)^{-1})_{ij}$ を求めよ。

(c) $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ に関する常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

を考える。ただし，$\top$ は転置記号である。この常微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_N(t))^\top$ が $t = 0$ で

$$x_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

を満たすとき，$t > 0$ に対して $x_i(t)$ を求めよ。

(d) $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ に対して $A^{N-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする。このとき，$\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}, \cdots$, $A^{N-1}\boldsymbol{x}$ は互いに線形独立であること，すなわち，c_0，$c_1, \cdots$，$c_{N-1} \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_0\boldsymbol{x} + c_1 A\boldsymbol{x} + \cdots + c_{N-1}A^{N-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つのは $c_0 = c_1 = \cdots = c_{N-1} = 0$ の場合に限られることを示せ。

(e) A は対角化できないことを示せ。

2. 偏微分方程式

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1}$$

の解 $u(x,y)$ は xyu 空間内の曲面 $S : u = u(x,y)$ を表している。このことに関して以下の設問に答えよ。

(a) $(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x})^\top$ および $(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y})^\top$ は S 上の点 $(x, y, u(x,y))$ における接平面内の 2 つの独立なベクトルを表している。$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, -1)^\top$ がこの点における S の法線ベクトルを表すとき n_x，n_y を求めよ。

(b) $\boldsymbol{n}$ はベクトル $\boldsymbol{d} = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))^\top$ と直交することを示せ。

(c) パラメータ $s \in \mathbb{R}$ を用いて定義される常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,y,u), \\ \dfrac{dy}{ds} = b(x,y,u), \\ \dfrac{du}{ds} = c(x,y,u) \end{cases} \tag{2}$$

の解 $(x(s), y(s), u(s))$ は式 (1) を満たすことを示せ。

(b) および (c) は，常微分方程式 (2) の解 $(x(s), y(s), u(s))$ が，偏微分方程式 (1) を満たす任意の点からベクトル場 $\boldsymbol{d}(x,y,u)$ に沿って伸びる，S 上に拘束された曲線（特性曲線）を表すことを意味している。このことを用いると，式 (2) を解くことで式 (1) の解を求めることができる。

(d) $a(x,y,u) = 1$，$b(x,y,u) = 1$，$c(x,y,u) = -u$ の場合を考える。$s = 0$ における条件 $x(0) \in \mathbb{R}$，$y(0) = 0$，$u(0) = \cos(x(0))$ の下で式 (2) を解き，パラメータ s を消去することにより，境界条件

$$u(x,0) = \cos(x)$$

を満たす式 (1) の解を求めよ。ただし，解の一意性は示さなくてよい。

(e) $a(x,y,u) = u$，$b(x,y,u) = 1$，$c(x,y,u) = 0$ の場合を考える。$x \in \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 $h(x)$ により，式 (1) に対する境界条件

$$u(x,0) = h(x)$$

が与えられたとする。$h'(\xi) < 0$ となる $\xi \in (-\infty, +\infty)$ が存在する場合には，ある $y \in (0, +\infty)$ と，ある $x \in (-\infty, +\infty)$ に対して偏微分係数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ が発散することを示せ。