

受験番号	
氏名	

令和8年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻博士課程入学試験問題

物 理 学

令和7年8月19日(火) 13時30分～16時30分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で3問ある。3問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計3枚配付されていることを確かめること。
5. 問題冊子の所定欄に受験番号、氏名を記入すること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
7. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
8. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面を使用する場合には、裏面の点線より上部の余白は使用しないこと。
9. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
10. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
11. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

金属中の電子をモデル化した1次元ハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

を考える。ここで p は運動量演算子、 m は質量、 x は位置の演算子とする。右辺第2項にあらわれるポテンシャル V は a ($a > 0$) の周期性を持つ。すなわち、

$$V(x) = V(x - a)$$

である。系のサイズを Na とし、波動関数に周期境界条件を課す。ここで N は正の整数である。以下の設問に答えよ。

1. 演算子 X, Y について

$$f(\lambda) = e^{\lambda Y} X e^{-\lambda Y}$$

を考える。 $f(\lambda)$ を λ について級数展開することで次式が成立することを示せ。

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \frac{1}{3!} [Y, [Y, [Y, X]]] + \cdots + \frac{1}{n!} \overbrace{[Y, [Y, \cdots, [Y, X] \cdots]]}^{n \text{ 個}} + \cdots$$

ここで演算子の指数関数は

$$\exp[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

で定義するものとし、 $[X, Y] = XY - YX$ である。

2. 並進操作を表す演算子を

$$T = \exp(-iap/\hbar)$$

とすると

$$TxT^{-1} = x - a, \quad TpT^{-1} = p$$

が成立することを示せ。ここで i は虚数単位、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。

3. $TV(x)T^{-1}$ がどうなるかを考えて T と H が同時対角化できることを示せ。また、 T の固有値が e^{-ik} 、 $k = \frac{2\pi j}{N}$ となることを示せ。ただし j は整数である。

以下,

$$V(x) = V_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)$$

の場合を考える。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数で $V_0 > 0$ とする。

4. 位置表示でシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{d^2}{dy^2}\phi(y) + v \sum_{n=0}^{N-1} \delta(y - n)\phi(y) = \alpha^2\phi(y) \quad (1)$$

となることを示せ。ただし $y = x/a$, $v = 2maV_0/\hbar^2$, $\alpha^2 = 2mEa^2/\hbar^2$ で E は固有エネルギー, ϕ は固有関数である。

5. $0 < y < 1$ では $V = 0$ であるから式 (1) の解は $\phi(y) = Ae^{i\alpha y} + Be^{-i\alpha y}$ とあらわせる。ここで A および B は適当な係数である。このことと問3の結果をあわせ, 特に $y = 0$ における $\phi(y)$ および $\frac{d\phi}{dy}$ の接続の条件から

$$\begin{aligned} A + B &= e^{-ik} \left(\boxed{\text{(a)}} \right) \\ A - B &= e^{-ik} \left(\boxed{\text{(b)}} \right) + v \left(\boxed{\text{(c)}} \right) \end{aligned}$$

という形の式が得られる。(a), (b), (c) にあてはまる式を A , B , α を使ってあらわせ。

6. 問5の結果を用いて

$$\cos k = \cos \alpha + \frac{v}{2\alpha} \sin \alpha \quad (2)$$

を示せ。

7. $v = 0$ のとき, l を整数として $\alpha = k + 2\pi l$, つまり $E = \hbar^2(k + 2\pi l)^2/2ma^2$ となる。ここで小さな v ($v \ll 1$) を導入し, E が $k = \pi$ でどのように変化するかを考えよう。 $\alpha = \pi(2l + 1)$ は式 (2) の解であるが, $\alpha = \pi(2l + 1) + \delta$ という解も存在する。ただし δ はゼロでない実数である。 δ を求め, v の導入によって E がどのように変化するかを議論せよ。ただし, δ が小さいとき

$$\begin{aligned} \cos(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -1 + \frac{\delta^2}{2} \\ \sin(\pi(2l + 1) + \delta) &\simeq -\delta \end{aligned}$$

としてよい。

第2問

図1左のように片方の端点(始点)が $x=0$ に固定され、長さ a の棒粒子が N 個連なってできる1次元の高分子を考える。各棒粒子は右向きか左向きか2状態のうちどちらかのみを取る。 R は高分子のもう片方の端点(終点)の x 座標であり、右向きの棒粒子の数 N_+ と左向きの棒粒子の数 N_- を用いて $R = (N_+ - N_-)a$ と表される。この高分子が温度 T の熱浴に接している状況を考える。以下の設問に答えよ。

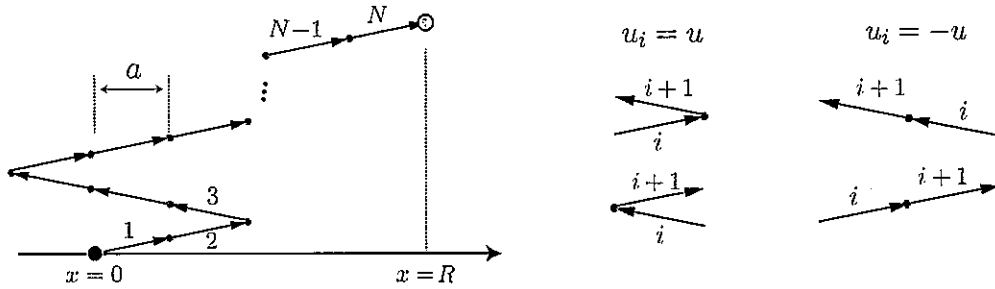


図1: 左: 1次元高分子モデルの構造。右: 連結部分のエネルギー(問3以降で用いる)。

- N_+ , N_- を指定したときに高分子が取りうる配置の数 $W(N_+, N_-)$ を求め、 N , N_+ , N_- が十分大きいときのエントロピー $S = k_B \ln W$ を $r = R/(Na)$ の関数として求めよ。ここで k_B はボルツマン定数である。必要に応じてスターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いてよい。
- 終点を $x = R = Nar$ で固定するために必要な力のうち、エントロピー由来の力

$$F_S = \frac{T}{Na} \frac{\partial S(r)}{\partial r}$$

を r , T , a の関数として求め、 r が小さいときにフックの法則が現れることを示せ。

次に、 i 番目の棒粒子と $i+1$ 番目の棒粒子の連結部分のエネルギー u_i を考慮に入れる。連結部分は曲がっている状態とまっすぐな状態とのどちらかを取り、図1右のようにそれぞれのエネルギーは u , $-u$ であるとする。また、高分子の終点には電荷 $+1$ が付加されており、電場 h が x 軸に沿って正の向きにかかっている。 i 番目の棒粒子の向きの変数 σ_i を導入し、右向きのとき $\sigma_i = 1$, 左向きのとき $\sigma_i = -1$ とすると、この高分子のエネルギーは

$$U(\{\sigma\}) = -u \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - ha \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

と表され、1次元のイジング模型と等価になる。以下の設問に答えよ。

- 棒粒子の向きの変数 σ_i , σ_{i+1} に依存する関数 $M_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} = \exp[\beta u \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta ha (\sigma_i + \sigma_{i+1})/2]$ を使って行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,-1} \\ M_{-1,1} & M_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta u + \beta ha} & e^{-\beta u} \\ e^{-\beta u} & e^{\beta u - \beta ha} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、行列 M の 2 乗 M^2 の成分 $(M^2)_{1,1}, (M^2)_{1,-1}, (M^2)_{-1,1}, (M^2)_{-1,-1}$ は

$$(M^2)_{\sigma_1, \sigma_3} = \sum_{\sigma_2 = \pm 1} M_{\sigma_1, \sigma_2} M_{\sigma_2, \sigma_3} = \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \exp \left[\beta u \sum_{i=1}^2 \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta h a \sum_{i=1}^3 \sigma_i - \boxed{} \right]$$

と書ける。ここで $\beta = 1/(k_B T)$ である。 $\boxed{}$ を埋めよ。

4. この系の分配関数は

$$Z = \sum_{\sigma_1 = \pm 1, \sigma_N = \pm 1} (M^{N-1})_{\sigma_1, \sigma_N} \exp \left[\boxed{} \right]$$

と書ける。 $\boxed{}$ を埋めよ。

5. 棒粒子 1 つあたりの自由エネルギー

$$f(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-k_B T \ln Z}{N}$$

を求めよ。ただし、必要に応じて行列 M の固有値

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta u} \cosh(\beta h a) \pm \sqrt{e^{2\beta u} \sinh^2(\beta h a) + e^{-2\beta u}}$$

を用いてよい。

6. $f(h)$ を $h = 0$ の付近で $\beta h a$ の 2 次まで展開した表式を求めよ。ただし、小さい δ に対して $\cosh(\delta) \simeq 1 + \delta^2/2$, $\sinh(\delta) \simeq \delta$ となることを用いてよい。

7. r の関数としての自由エネルギー $g(r)$ は逆ルジャンドル変換により

$$g(r) = \min_h [f(h) + r a h] = f(h^*(r)) + r a h^*(r)$$

と求まる。ここで、 $h^*(r)$ は $r a = -\frac{\partial f}{\partial h}$ を満たす h である。問 6 の結果を用いて、 $h^*(r)$ を r の最低次の関数として求めよ。

8. 電場がないとき ($h = 0$) に終点を $x = R = N a r$ で固定するために必要な力

$$F = -\frac{1}{a} \frac{\partial g(r)}{\partial r}$$

を、 r が小さいときについて r , T , a , u の関数として求めよ。また、 F と問 2 で求めた F_S をそれぞれ R , T , N , a , u の関数として表したとき、 F_S の表式において棒粒子の長さ a を実効的な棒粒子の長さ \tilde{a} に置き換えることで F が得られることを示し、 u が正の場合、負の場合それぞれについて、 \tilde{a} と a の大小関係を答えよ。また、なぜそのようなになるか、物理的な解釈を述べよ。

第3問

図1のように、鉛直な回転軸に水平に固定された管の内部に、質量の異なる2つの質点（それぞれ質量 m , M とする）を質量の無視できる長さ $2a$ の棒でつないだ物体をおく。質量 M の質点のみ、電荷 Q ($Q > 0$) をもつものとする。回転する管が通過する領域には、磁束密度の大きさ B の一様な磁場が鉛直下向きにかけられているものとする。図1のように、2つの質点を結ぶ棒の向きに x 軸をとり、回転軸に対する棒の中心の座標を x とする。管内部において、物体は x 方向と垂直な向きに運動しないものとし、管は充分に長く、物体が管から飛び出すことはないものとする。また、管の質量・太さ・厚み、および管と物体との摩擦は、いずれも無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。

はじめ、回転軸に対してトルクを与え、上から見て反時計回りに一定の角周波数 ω で管を回転させる場合を考える。以下の設問に答えよ。

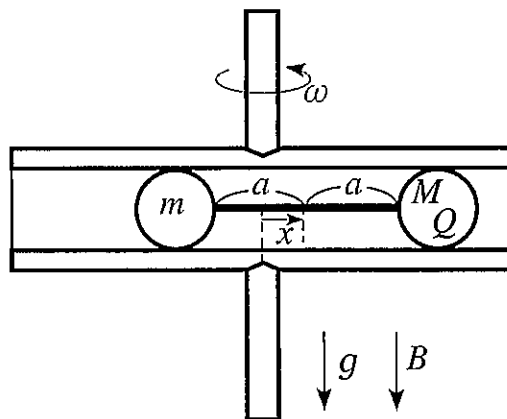


図1: 回転軸に固定された管の中の2つの結合された質点。

1. 管が一定の角周波数 ω で回転しているとき、物体は管内部で動かなかった。このときの物体の x 軸上の位置 x_0 を m , M , a , ω , Q , B , g の中から必要なものを用いて表せ。
2. 問1のとき、回転軸の周りの物体の角運動量の大きさを m , M , ω , B , a , x_0 の中から必要なものを用いて表せ。
3. 管の回転を停止し、問1とは異なる x 軸上の位置に物体を移動させてから再び管を角周波数 ω で回転させたところ、物体は x 方向に単振動を始めた。このような振る舞いを示すために必要な m , M に対する必要十分条件を求めると共に、単振動の角周波数を a , m , M , Q , B , ω の中から必要なものを用いて表せ。

つぎに、図2のように、管を支柱の上におき、管が水平面となす角を $\theta(t)$ とする。 $t = 0$ において $\theta = 0$ で静止している状態から、管が水平面に対してゆっくり傾いていく運動を考える。管は支柱の上で滑らないものとする。時刻 t における物体の x 軸上の位置を $x(t)$ とする。 $t = 0$ において物体も管に対して静止しており、 $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ とする。問4, 5, 6では、 $B = 0$ とし、管が水平面内では回転しないものとせよ。以下の設問に答えよ。

4. 支点を通り、 x 軸に垂直な軸の周りの物体の慣性モーメントを m , M , a , Q , x の中から必要なものを用いて表せ。
5. $|\theta| \ll 1$, かつ $|x| \ll a$ である場合を考える。このとき、 $\cos \theta \simeq 1$ かつ $a \pm x \simeq a$ と近似して、管の θ 方向の運動方程式を解き、 $\theta(t)$ を Q , m , M , g , a , t の中から必要なものを用いて表せ。
6. 問5のとき、 x 方向の物体の運動方程式を解き、時刻 t における x を Q , m , M , g , a , t の中から必要なものを用いて表せ。ただし、 $\sin \theta \simeq \theta$ と近似してよい。
7. 磁束密度の大きさ B がゼロでない場合、管は鉛直面内で傾き始めると共に、水平面内において回転を始める。時刻 $t = 0$ での管の水平面内の向きを基準として、時刻 t における水平面内の管の回転角を $\phi(t)$ で表すものとする。このとき、 $|\theta| \ll 1$, $|x| \ll a$ の場合に、 $\phi(t) \propto t^n$ と表される。 n の値を求めよ。

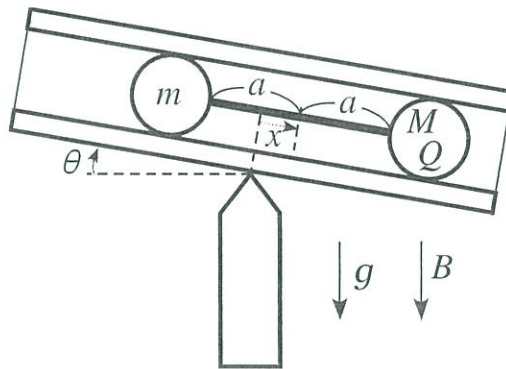


図2: 支柱の上におかれた管の内部の2つの結合された質点。管の質量・太さ・厚みは、いずれも無視できるものとする。