平成１９年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成１９年２月６日（火）　９時３０分～１１時３０分

問題は１～３まで３問ある。
問題ごとに別の答案用紙を使用し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入せよ。

問題1

一次元調和振動を行っている質量 m の電子について，以下の設問に答えよ。

(1) 正準交換関係 $[\hat{p}, \hat{x}] = \hbar/\mathrm{i}$ を満たす運動量 $\hat{p}$ と位置座標 $\hat{x}$ を用いてハミルトニアンは次の形で与えられる。

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

ただし，ω は角振動数を表す。エルミート共役な昇降演算子

$$\hat{b}^\dagger = \alpha\hat{x} - \mathrm{i}\beta\hat{p}, \qquad \hat{b} = \alpha\hat{x} + \mathrm{i}\beta\hat{p}$$

を導入し，

$$\hat{H}_0 = \gamma(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger)$$

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

を満たすように，α, β, γ を定めよ。

(2) ハミルトニアンの規格化された固有状態をエネルギーが低い方から順に $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ と記す。$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ を示し，状態 $|n\rangle$ のエネルギー固有値を求めよ。

(3) この系に一様な電場を加えた場合を考えよう。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - eE\hat{x} \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - m\omega^2\delta\ \hat{x}\end{aligned}$$

で与えられる。ここで e は素電荷，E は電場の強さ，$\delta = eE/m\omega^2$ であり，δ は以後の式を見やすくするために導入した。$\hat{H}$ の固有状態を $|n\rangle_E$ と記そう。このハミルトニアンでの昇降演算子と，固有エネルギーを求めよ。答えは E ではなく，δ を用いて記せ。

(4) $t < 0$ では電場がかかっていて，電子状態は電場中の基底状態 $|0\rangle_E$ であった。ここで，$t = 0$ に瞬間的に電場を切る。電場を切った直後の波動関数は，直前の波動関数と等しいはずであるが，これは電場がないときのハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有状態ではなく，様々な状態 $|n\rangle$ の重ね合わせで，

$$|0\rangle_E = \sum_{n=0}^{\infty} a_n|n\rangle$$

と表される状態になっている。展開係数 a_n が満たす漸化式を導き出せ。

(5) a_n の値を求め，$t > 0$ で電子が状態 $|n\rangle$ に見つかる確率を求めよ。ただし，状態間の遷移は起こらないものとする。

(6) 設問 (5) の結果を利用して，$t > 0$ における $\hat{x}$ の期待値が古典力学の場合と同じ時間変化をすることを示せ。

問題 2

質量 m, スピン 0 のボース粒子 N 個からなる体積 V の 3 次元理想気体を考える。N は十分大きい数とし, V は一定とする。以下の設問に答えよ。

(1) エネルギー E と $E+\delta E$ の間にある状態の数を $D(E)\delta E$ とするとき, $D(E)$ を状態密度と呼ぶ。$D(E)$ は $\sqrt{E}$ に比例し, $D(E)=A\sqrt{E}$ と書ける。比例係数 A を求めよ。以下の問題では $D(E)=A\sqrt{E}$ としてよい。

(2) ボース統計では, 温度 T において, エネルギー E の 1 粒子状態を占有する粒子数の平均値は

$$f(E)=\frac{1}{e^{(E-\mu)/k_BT}-1}$$

で表される。k_B はボルツマン定数, μ は化学ポテンシャルである。

(a) 基底状態 $E=0$ の粒子数 N_0 の平均値が負にならないためには, $\mu<0$ でなければならないことを示せ。

(b) $D(E)=A\sqrt{E}$ を用いて, 温度 T で励起状態（$E>0$）にある粒子の総数 N_e には最大値 $N_e^{\max}$ が存在することを示せ。必要であれば, 以下の展開式および近似式を用いてよい。

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x+\alpha}-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\alpha}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cong 2.612$$

(3) 設問 (2)(b) で求めた $N_e^{\max}$ が全粒子数 N に一致する温度を T_c と呼ぶ。$T<T_c$ のとき, N_e, および N_0 の全粒子数 N に対する割合, N_e/N, N_0/N を T と T_c を用いて表せ。

(4) 設問 (3) の結果から, $T<T_c$ では, 巨視的な数の粒子が基底状態にいることがわかる。基底状態の粒子数は $N_0=f(0)$ と表される。このことから, 転移温度 T_c 以下では $|\mu|$ は k_BT に比べて十分小さく,

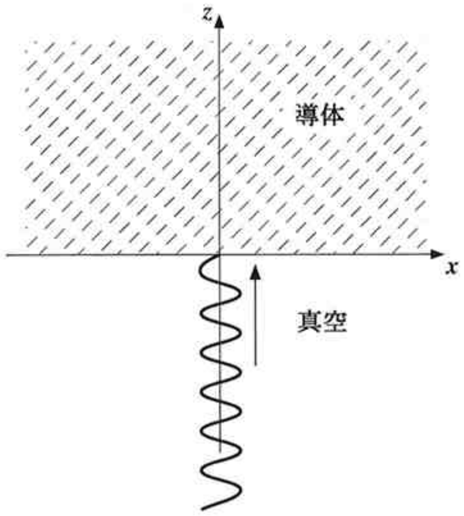
$$\mu\cong-\frac{k_BT}{N_0}$$

となることを示せ。

(5) $T\ll T_c$ では, 定積比熱は $T^{3/2}$ に比例することを示せ。ただし, $\mu=0$ としてよい。

問題3

右図のように下面が x-y 平面に一致する導体が $z \geq 0$ にある。この導体に向って角振動数 ω を持つ平面電磁波が z 軸方向に進んでいる。導体中には静電荷が存在しないとして，以下の設問に答えよ。



(1) 静電荷が存在しない時，マクスウェル方程式は以下のように書ける。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

ただし，$\vec{D}$，$\vec{B}$ はスカラー量である誘電率 ε と透磁率 μ を用いて $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，$\vec{B} = \mu\vec{H}$ と書けるものとする。上記の方程式を電場 $\vec{E}$，磁場 $\vec{H}$ の x，y，z 各成分を用いた方程式に書き下せ。

以下では，電場が x 成分のみを持つように直線偏向している電磁波を考える。この時，

$$E_x = E_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \quad E_y = 0 \tag{1}$$
$$H_y = H_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\alpha)}, H_x = 0 \tag{2}$$

と書けるものとする。α は電場と磁場の位相差で，真空中では 0 である。

(2) 真空中には電流が存在しないことを用いて，真空中で E_x が満たす微分方程式を導け。また，その方程式を解いて真空中における k と ω の関係を示せ。真空の誘電率と透磁率は各々ε_0，μ_0 とする。

(3) 導体中では，$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ の電流が生じる。ここで，σ は電気伝導度である。導体中における k と ω の関係を求めよ。

(4) 設問 (3) の結果を用いて，電場の振幅が導体中で急速に減衰する (「表皮効果」と呼ばれる) ことを示せ。ここで，導体中の誘電率は小さく，$\varepsilon \ll \sigma/\omega$ が成り立つことを用いてよい。また，電磁波が導体中に入り込む深さ (電磁波の振幅が $1/e$ になる深さ) を求めよ。

(5) 電磁波の角振動数が $\omega = 2\pi \times 1.7$ GHz，導体が銅 (電気伝導度 $\sigma = 5.9 \times 10^7\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$) の時，その具体的な数値を有効数字 1 桁で求めよ。導体中の透磁率は真空の透磁率と等しく，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Hm}^{-1}$ であるとする。

(6) 電場と磁場の振幅の関係は，

$$H_y = \frac{k}{\mu\omega}E_x \tag{3}$$

と与えられる。$z = 0$ での電場と磁場の連続条件より，電磁波の反射率を求めよ。