平成２１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２１年２月５日（木）　９時３０分～１１時３０分

問題は全部で３問あります。
問題ごとに別の答案用紙を使用し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

問題1

ポジトロニウム，水素原子、クーパー対などに代表されるスピン1/2の二粒子系を考える。粒子 $j(=1,2)$ のスピン演算子を $\vec{s}_j$ とし、スピン上向きと下向きの波動関数をそれぞれ $|\uparrow\rangle_j$、$|\downarrow\rangle_j$ で表す。このとき、昇降演算子 $s_{j\pm}=s_{jx}\pm is_{jy}$ と s_{jz} に対して

$$
\begin{array}{lll}
s_{j+}|\uparrow\rangle_j=0, & s_{j-}|\uparrow\rangle_j=|\downarrow\rangle_j, & s_{jz}|\uparrow\rangle_j=+\frac{1}{2}|\uparrow\rangle_j \\
s_{j+}|\downarrow\rangle_j=|\uparrow\rangle_j, & s_{j-}|\downarrow\rangle_j=0, & s_{jz}|\downarrow\rangle_j=-\frac{1}{2}|\downarrow\rangle_j
\end{array}
$$

が成り立つ。以下では、4つの組み合わせ

$$
|1\rangle=|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2,\qquad |2\rangle=|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2,\qquad |3\rangle=|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2,\qquad |4\rangle=|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2
$$

を基底ベクトルとし、かつ軌道角運動量がゼロの状態のみを考えるものとする。まず、ハミルトニアンが $\mathcal{H}=4A\,\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2$ と書ける場合の固有値問題を考える。ただし A は定数である。

(1) ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を昇降演算子 $s_{j\pm}$ 及び s_{jz} を用いて書き直せ。

(2) 設問(1)の結果を使って、以下の4つの状態がハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有エネルギーを求めよ。

$$
|1'\rangle=|1\rangle,\qquad |2'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle+|3\rangle\right),\qquad |3'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle-|3\rangle\right),\qquad |4'\rangle=|4\rangle
$$

(3) 合成スピンを $\vec{S}=\vec{s}_1+\vec{s}_2$ とし、その z 成分を S_z とする。演算子 $|\vec{S}|^2$ と S_z の固有値が良い量子数であることを示せ。一般に、ハミルトニアンの固有状態が他の演算子の固有状態でもあるとき、その演算子の固有値を良い量子数と呼ぶ。

次に z 軸方向に磁場を加えた状態を考える。このときハミルトニアンは、

$$
\mathcal{H}'=4A\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2+2C\,s_{1z}+2D\,s_{2z}
$$

となる。ただし、C,D は磁束密度の大きさに比例する定数である。ここで、時間に依存しないシュレーディンガー方程式 $(\mathcal{H}'-E)\Psi=0$ を行列形式で書くことにより、固有値問題を解いてみる。

(4) ハミルトニアンの各行列要素は $H'_{kl}=\langle k|\mathcal{H}'|l\rangle$ $(k,l=1,2,3,4)$ と表され、波動関数

$$
\Psi=\sum_{n=1}^{4}c_n|n\rangle
$$

は列ベクトルで表される。このとき、シュレーディンガー方程式の具体的な形は、

$$
\begin{pmatrix}
A+C+D-E & 0 & 0 & 0 \\
0 & -A+C-D-E & 2A & 0 \\
0 & 2A & -A-C+D-E & 0 \\
0 & 0 & 0 & A-C-D-E
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=0
$$

となる。これを解くことにより固有エネルギーと固有状態を求めよ。

(5) 磁場が十分強い極限 $(A\ll C,D)$ での「良い量子数」を2つ示せ。また、磁場が無い場合(設問(3))と磁場が強い極限で「良い量子数」が異なる理由を簡潔に答えよ。

問題2

図1のような一辺の長さLの立方体(体積$V=L^3$)の容器内を、質量mの単原子分子N個からなる古典理想気体が満たしており、温度Tの熱平衡状態にある。以下の設問に答えよ。ただし、分子同士の衝突は無視し、分子は壁と完全弾性衝突するものとする。

(1) 速度のx成分がv_xの分子1個が、x軸に垂直な容器壁Wに単位時間当たり衝突する回数を求めよ。また、壁Wがこの分子から単位時間当たりに受ける力積の和、すなわち力f_xを求めよ。

(2) 壁Wが気体から受ける力F_xは、f_xをすべての分子について足し合わせることで得られる。気体の圧力Pを分子の速さvの二乗平均$\langle v^2 \rangle$を用いて表せ。

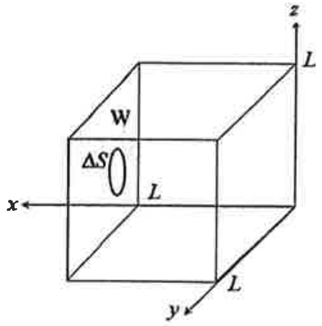

図 1:

この容器から分子1個を取り出した時、その分子が速度$\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$である確率Rは、マクスウェル－ボルツマンの速度分布関数

$$p(\vec{v}) = C \exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right]$$

を用いて、$R = p(\vec{v})\,dv_x dv_y dv_z$で表される。以下の設問に答えよ。ただし、$k_B$はボルツマン定数である。必要があれば、以下の関係式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{0}^{\infty} dx\, x^2 \exp(-\alpha x^2) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

(3) $p(\vec{v})$の比例定数Cは、$[m/(2\pi k_BT)]^{3/2}$であることを示せ。

(4) 壁Wの面積素片ΔS(図1)に単位時間当たり衝突する分子数は、体積素片$v_x\Delta S$の中にある分子数と同じで、

$$v_x \Delta S \frac{N}{V} p(\vec{v})\,dv_x dv_y dv_z$$

で与えられる。$v_x > 0$の分子のみが壁に衝突することに注意してF_xを求め、理想気体の状態方程式が導かれることを示せ。

(5) 一方、分子の速さvに関するマクスウェル－ボルツマンの分布関数$q(v)$は、

$$q(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)$$

で与えられる。qをvの関数として図示せよ。また、$q(v)$が最大となる速さv_mとqの最大値$q(v_m)$を求めよ。

問題3

電場や磁場の中での荷電粒子の運動を考える。ただし、非相対論的に取り扱うものとする。

(1) 最初静止している陽子と電子が電位差 V で作られる電場によって加速された。電子の質量 $m_e = 9.0 \times 10^{-31}$ kg, 陽子の質量 $m_p = 2000\ m_e$, 素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C とし、重力の効果は無視できるとする。以下の設問に答えよ。

(a) $V = 1$ kV の時、加速後に電子が得る速さを有効数字2桁で計算せよ。また、陽子の場合はその何倍になるか、m_p と m_e を用いて表せ。

(b) 設問 (1)(a) で加速された陽子、電子が 0.1 T の一様な磁束密度 $\vec{B}$ の領域に入射され、円運動（サイクロトロン運動）を始めた（図1)。電子の円運動の半径と周期を有効数字2桁で計算せよ。また、陽子の円運動の半径と周期は電子の値と比べてそれぞれ何倍になるか、m_p と m_e を用いて表せ。

(c) 設問 (a) で加速された電子が、今度は速度 $\vec{v}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の角度が 60 度となるように入射された（図2)。この場合、電子は磁束密度 $\vec{B}$ の方向を軸とする、らせん運動をする。磁束密度の大きさが 0.1 T のとき、電子が一周する間に $\vec{B}$ の方向に進む距離を有効数字2桁で求めよ。

(2) 設問 (1)(b) で、$\vec{B}$ に直交する一様な電場 $\vec{E}$ を図1の y 軸方向にかけると、円運動の中心（旋回中心）が $\vec{B}$ にも $\vec{E}$ にも垂直な方向に等速運動することが知られている。以下の設問に答えよ。

(a) 電子の運動方程式 $\vec{F} = m_e(d\vec{v}/dt)$ を、$e, \vec{v}, \vec{B}, \vec{E}$ を用いて表せ。

(b) $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_d$ とおいて、$\vec{v}'$ を円運動に、$\vec{v}_d$ を等速運動に対応させると、$m_e(d\vec{v}_d/dt) = 0$ を得る。$\vec{v}_d$ の表式を導出し、電子と陽子それぞれの場合について、$\vec{E}$ と $\vec{B}$ に対する $\vec{v}_d$ の向きを図示せよ。ここで、$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$ の関係を用いてもよい。

(3) 図1の y 軸の正の向きに重力 $\vec{F_g}$ が働いており、一様な磁束密度 $\vec{B}$ が z 軸の正の向きにかかっている領域に、速度 $\vec{v}$ をもつ電子と陽子が x 軸の正の向きに入射された。この場合も、入射された粒子は $\vec{F_g}$ にも $\vec{B}$ にも垂直な方向に旋回中心が等速運動する。電子と陽子それぞれの旋回中心の運動の方向を理由と共に図示せよ。

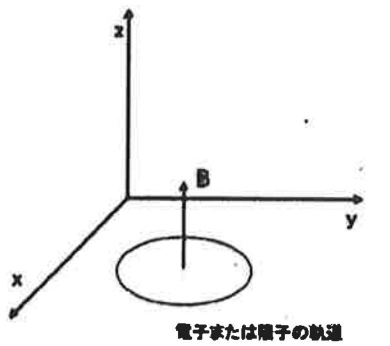

図1

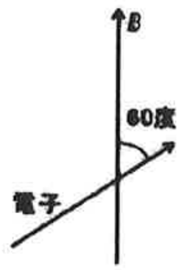

図2