平成２６年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

# 物　理　学

平成２６年２月３日（月）　９時３０分～１１時３０分

問題は全部で３問あります。
第１－３問をそれぞれ別の答案用紙（計３枚）に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

## 第1問

一次元ポテンシャルによる質量 $m$ の粒子の散乱に関し，以下に答えよ。単位系は $m=1, \hbar=1$ とする。

まず，ポテンシャルが $V(x)=\dfrac{V}{2}\delta(x)$ の場合を考える。

1. エネルギーを $\dfrac{k^2}{2}$，波動関数を $\psi(x)$ として，定常状態の Schrödinger 方程式を書き下せ。

2. 入射波を

$$\psi_{\rm in}(x)=e^{ikx}$$

とする。反射波の振幅を $r$，透過波の振幅を $t$ として，$x<0$，$x>0$ での波動関数 $\psi(x)_-, \psi(x)_+$ を表わせ。

3. 原点で，波動関数 $\psi(x)_-|_{x\to 0-}$ と $\psi(x)_+|_{x\to 0+}$ が満たすべき条件を求めよ。

   また，原点近傍の微小区間 $-\epsilon<x<\epsilon$ で Schrödinger 方程式を積分し，$\epsilon\to 0$ の極限を取ることにより，波動関数の一階微分 $\psi'(x)_-|_{x\to 0-}$ と $\psi'(x)_+|_{x\to 0+}$ が満たすべき条件を示せ。

4. 上の 3. を用いて，$r$ と $t$ を求めよ。

5. 反射係数 $R=|r|^2$ および透過係数 $T=|t|^2$ を求めよ。

6. $V\to\pm\infty$ とした時の，透過係数 $T$ と，透過波の波動関数の位相のずれ (phase shift) の振る舞いを定性的に論じよ。

次にポテンシャル $V(x)=\dfrac{V}{2}\left(\delta(x)+\delta(x-L)\right)$ に入射波 $\psi_{\rm in}(x)=e^{ikx}$ が入る場合を考える ($L>0$ とする)。

7. 上の 2.–4. と同様にして透過波の振幅 $t$ を求めると，

$$t=\frac{4k^2}{4k^2+V^2e^{2ikL}+4ikV-V^2}$$

となる。これを用いて，$|V|$ が十分に大きい場合の透過係数 $T$ の $L$ 依存性のグラフを定性的に描け。

8. $|V|$ が入射エネルギーに比べて十分に大きく，かつ，$T$ が最大になる場合の $|\psi(x)|^2$ の概形を $x$ の関数として示し，その物理的意味を論じよ。

## 第2問

質量がなく向きのある$n$本の棒（$i = 1, 2, \cdots, n$）が下図のように1次元的につながっている。各棒は長さが$l$であり，$i$が増える方向に向きをそろえてジョイントで連結している。ジョイントは折れ曲がることができるが，折れ曲がりの結果，各棒の向きは，0度（$x$軸の正の方向）か180度（$x$軸の負の方向）のいずれかの値をとるものとする。正の方向を向いた棒は棒1本あたり$\epsilon/2$，負の方向を向いた棒は1本あたり$-\epsilon/2$のエネルギーを持つものとする（$\epsilon > 0$）。この系は温度$T$の熱浴と接している。ここで，1番目の棒の開放端を原点に固定し，$n$番目の棒の開放端（下図のA点：以下，鎖の端点と呼ぶ）を外力で引っ張る。

1. $x$軸の正の方向を向いた棒の数を$n_+$とし，鎖の端点の位置$X$を$l$, $n$, $n_+$を用いて表せ。

2. 鎖の端点の位置が$X$となる場合の状態数$W$を$n_+$, $n$を用いて表せ。

3. 鎖の端点を引っ張る方法として，鎖の端点のみが電荷$q$を持つとし（$q > 0$），$x$軸正の方向を向く強さ$E$の電場により力$f = qE$で引くものとする。鎖の端点の位置が$X$となる場合の系全体のエネルギーを$f$, $\epsilon$, $l$, $n$, $n_+$を用いて表せ。ただし，鎖の端点の静電ポテンシャルの値は，$X = 0$でゼロと仮定する。

以下の設問ではカノニカル分布を仮定する。

4. 鎖の端点の位置が$X$となる確率$p$を$f$, $\epsilon$, $l$, $n$, $n_+$, $T$, $k_B$を用いて表せ。ただし，$k_B$はボルツマン定数とする。なお，この設問においては分配関数における，$n_+$についての和をそのまま残した形で書いてよい。

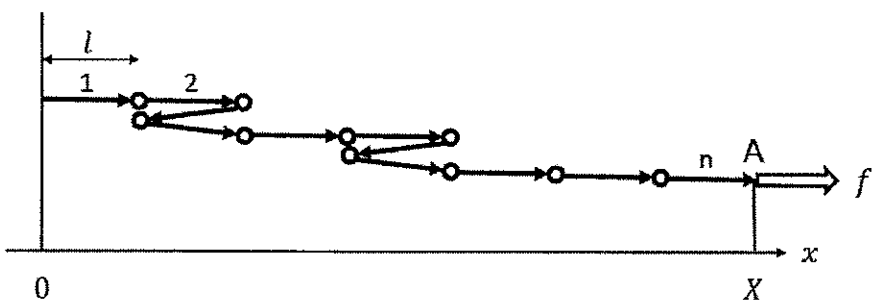
5. 鎖の端点の位置$X$の期待値$\langle X \rangle$を$f$, $\epsilon$, $l$, $n$, $T$, $k_B$を用いて表せ。この設問においては$n_+$についての和を計算し，$n_+$によらない形で答えよ。

6. $\langle X \rangle$が正になる条件を求めよ。

以下の設問では設問6の条件が満たされているとする。

7. 温度ゼロと$\infty$についてそれぞれ$\langle X \rangle$を求めよ。

8. 力$f$を一定にしたまま，温度を上げると$\langle X \rangle$はどうなるか？この現象をエネルギーとエントロピーの観点から説明せよ。



**第3問**

マクスウェル方程式を出発点として，導波管内を伝播する電磁波について考えよう。真空中のマクスウェル方程式は以下で与えられる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

ここで $c$ は真空中の光速度である。

1. 電場 $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\boldsymbol{E} = 0$$

を導け。

次に，図1に示すような長方形 $(a > b)$ の断面を持つ導波管内を z 方向に伝播する電磁波を考える。導波管の壁面は完全導体でできており，内部は真空とする。以下，この導波管を伝播する電磁波のうち，電場 $\boldsymbol{E}$ が $z$ 方向に対して垂直で，$y$ 方向にのみ成分 $E_y$ を持つ波を考える。このような電磁波のモードを TE モードと呼ぶ。この $y$ 成分を

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) \exp i(k_z z - \omega t)$$

と書く。

2. $k_x$ の満たすべき条件を，導波管壁面での境界条件を考慮して示せ。

以下, 設問2で求めた $k_x$ のうち最も小さな値をとるモードについてのみ考える。

3. 導波管内の電磁波は設問1で求めた波動方程式を満たしていなければならない。このことから，$k_z$ と $k_x$ の関係を求め，さらに $k_z$ を $\omega$ 及び $a$,$b$ 等を用いて表わせ。

4. 設問3の結果から，周波数が，ある周波数 $\omega = \omega_c$ より低い電磁波はこの導波管を伝播することができないことがわかる。その理由とともに，$\omega_c$ を求めよ。

5. 磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。$k_z$ はそのまま用いてよい。

6. 単位時間, 単位面積当たりの電磁波のエネルギーの流れは, ポインティングベクトルの平均値 $\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*$ で与えられることを用いて，この導波路の断面を単位時間あたりに通過する電磁波のエネルギーを求めよ。ここで $\epsilon_0$ は真空の誘電率である。$\boldsymbol{B}^*$ は $\boldsymbol{B}$ の複素共役を表す。

7. 群速度 $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_z}$ を $\omega_c$ を用いて表わせ。またそれが，設問6の結果とどのような関連があるか議論せよ。

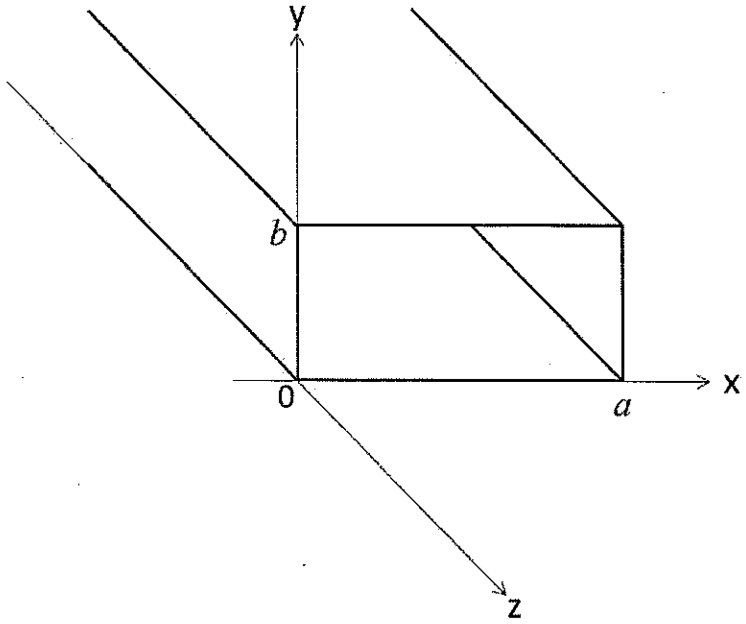



図 1