平成２５年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻　博士課程入学試験

物　理　学

平成２５年２月４日（月）　９時３０分～１１時３０分

問題は全部で３問あります。
第１－３問をそれぞれ別の答案用紙（計３枚）に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

第1問

時間に依存する2準位系のハミルトニアンとシュレーディンガー方程式:

$$H(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) & \lambda V \\ \lambda V & E_2(t) \end{pmatrix}, \qquad i\frac{d\Psi(t)}{dt} = H(t)\Psi(t),$$

を考える。ただし, 第1問では $\hbar = 1$ とする。ここで, $E_1(t)$ と $E_2(t)$ は時間 t に依存するが, V は t に依存しない。また, λ は無次元の定数である。図1には, $E_1(t)$ と $E_2(t)$ の t 依存性が点線で, H の固有値の t 依存性が実線で定性的に示されている。以下の設問に答えよ。

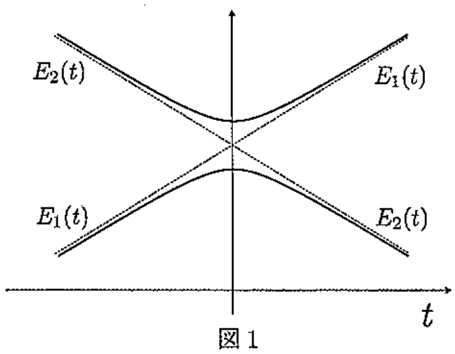

図1

1. 各時刻 t での H の固有値を, E_1, E_2, λ, V を用いて表せ。

2. $\lambda = 0$ のときに, シュレーディンガー方程式の独立な2つの解 $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ を, $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, および E_1 と E_2 を用いて表せ。ただし, $\psi_1(t \to -\infty) = \phi_1$, $\psi_2(t \to -\infty) = \phi_2$ とする。

3. $\lambda \neq 0$ のときの波動関数 $\Psi(t)$ を,
$$\Psi(t) = A(t)\psi_1(t) + B(t)\psi_2(t)$$
としたとき, $A(t)$ および $B(t)$ が従う連立一階微分方程式を, λV および $E_{12}(t)$ $(= E_1(t) - E_2(t))$ を用いて表せ。

以下では, α を時間に依存しない正の定数として, $E_{12}(t) = \alpha t$, という場合を考える。このとき, $t \to -\infty$ で低いエネルギー準位にあった状態が, $t \to +\infty$ で高いエネルギー準位に遷移する確率を P とする。

4. この過程を記述するための $A(t)$ および $B(t)$ に関する初期条件を与えよ。

5. λ が微小量のとき, 設問3の微分方程式を設問4の初期条件のもとで λ の1次までの近似で解いて, $|B(t = \infty)|$ を求めよ。ここで, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iaz^2)dz = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}$ を用いてよい。

6. 設問5の結果から, 遷移確率 P を λV および α を用いて表せ。さらに, 得られた結果の物理的意味を, λV と α の依存性に言及して100字以内で述べよ。

第2問

温度Tの熱平衡下で，立方体の容器中に質量mの分子N個からなる気体が閉じ込められている。容器の体積はV，内側の総表面積はSである。分子間の相互作用は無視できるほど小さく，古典理想気体と見なしてよい。重力は無視してよい。ボルツマン定数をk_{B}とする。$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$とスターリングの公式$\ln N! = N\ln N - N \ (N \gg 1)$を用いてよい。以下の設問に答えよ。

1. 分子が単原子分子の場合，気体の分配関数Zとヘルムホルツの自由エネルギーFを求めよ。

次に，分子が長さdの細長い棒状分子の場合を考える。図1(a)に示すように，容器の壁面の近くでは分子の回転は制限される。この幾何学的な制限による影響を考える。

2. 分子の回転運動に関するハミルトニアンは，慣性モーメントをIとし，極座標(θ,ϕ)を用いると

$$H_{\mathrm{rot}} = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I\sin^2\theta}$$

と表せる。ある分子の重心が一つの壁面から距離$x(< d/2)$に位置するとき，分子の回転運動に関する分配関数$Z_1(x)$を求めよ。ただし，この分子は他の壁面からは十分離れているとする。

3. この気体の圧力は

$$P = \frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{V - Sd/4}$$

と表せる。この式を導け。

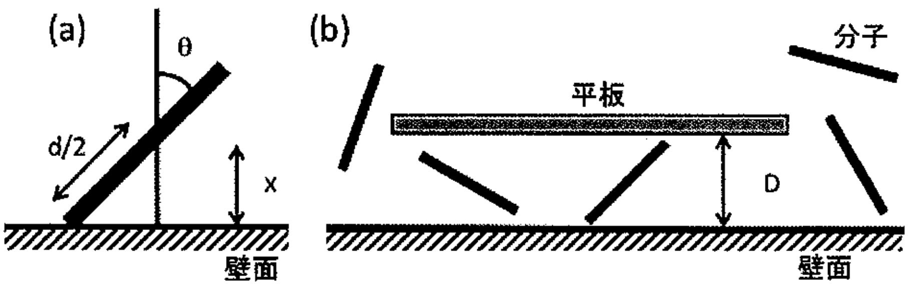

図 1: (a) 壁面近傍にある分子の模式図，(b) 壁面近傍にある平板の模式図

図 1(b) のように, 各辺の長さが d より十分大きく片面の面積が S_1 で厚みが無視できるほど小さい平板を容器内に入れる。この平板を壁面に水平に距離 $D(< d)$ まで近づけると, 平板と壁面の間に力が働く。

4. 平板と壁面の間に働く単位面積あたりの力 f を求めよ。

5. この力の統計力学的な説明を 100 字程度で述べよ。

第３問

図１に示したように, ある座標系Ｌ（x, y, z の右手系直交座標系でＬ系とよぶ）において, x 軸に沿って $x < 0$ の遠方からこの系に静止した電磁場に影響を与えない細い管があり原点 O で開口している。電荷 $q(>0)$, 質量 $m(>0)$ をもつ粒子 A がこの管の中を一定の速さ $v(>0)$ で O に向かって滑ってくる。粒子 A と管の摩擦はなく, 重力も無視する。全ての系は真空中にある。もう一つの座標系Ｃ（x', y', z' の右手系直交座標系でＣ系とよぶ）はＬ系に対して x 軸方向に速さ v で動いており, Ｌ系の時刻 $t = 0$, Ｃ系の時刻 $t' = 0$ において, Ｌ系とＣ系の原点および３つの空間座標軸は一致する。Ｃ系において, 粒子 A は $t' \leq 0$ で原点 O' に静止している。Ｌ系では一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B), (B > 0)$ が満ちている。また, 真空中での誘電率を ϵ_0 とする。c は真空中での光速である。

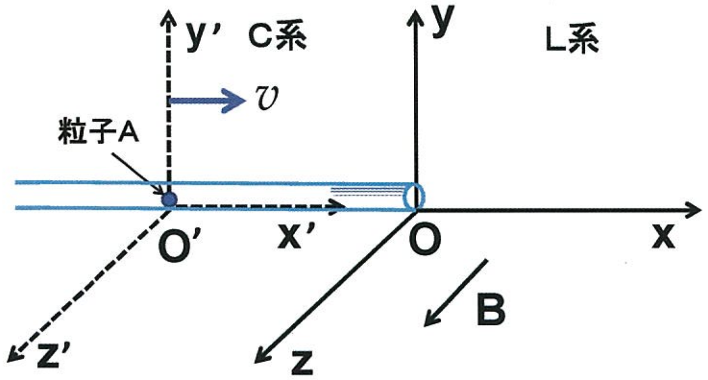

図 1:

次の設問に答えよ。ただし, はじめの２つの設問では, 速さ v は非相対論的 $(v \ll c)$ としてよい。

1. Ｌ系で $t < 0$ において, 粒子 A が管に及ぼす力の３成分を求めよ。

2. Ｃ系において $t' = 0$ のとき, $x'y'$ 平面上の点 $(x', y', 0)$ における, 粒子 A の作る電場の３成分 $E'_x(x', y', z'), E'_y(x', y', z'), E'_z(x', y', z')$ を求めよ。

次に, v が相対論的な速さの場合を考える。Ｌ系におけるある点の四元座標を ct, x, y, z とすると, Ｃ系でのその点の四元座標 ct', x', y', z' は, 座標のローレンツ変換により, $ct' = \gamma(ct - \beta x)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$ で与えられる。ただし, $\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。一般に, Ｌ系での電場の３成分を E_x, E_y, E_z, 磁束密度の３成分を B_x, B_y, B_z とすると, 電磁場のローレンツ変換により, Ｃ系での電場の３成分は $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$, $E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$, Ｃ系での磁束密度の３成分は $B'_x = B_x$, $B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2)$, $B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2)$ で与えられる。Ｃ系からＬ系へのローレンツ変換は, Ｌ系からＣ系への変換式で v を $-v$ とすれば求まる。

3. 設問 1 に関連して, C 系では $t' = 0$ で粒子 A は静止しているので, 粒子 A は磁場からは力を受けない。しかし, 粒子 A は管に力を及ぼしている。その理由を述べ, この力の 3 成分を求めよ。

4. 上に与えた座標と電磁場それぞれのローレンツ変換と, 設問 2 の結果を用いて, L 系において $t = 0$ のとき, xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ における, 粒子 A の作る電場の 3 成分 $E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z)$ を求めよ。

5. L 系では $t = 0$ で粒子 A は管から飛び出す。粒子 A の速度は磁場と直行しているのでエネルギーが保存する。したがって, 運動量の表式 $m\gamma\vec{v}$ において, $\vec{v}$ は大きさが一定で方向のみ変化する。$t > 0$ での粒子 A の軌跡の方程式を求め, 軌跡を図示せよ。

6. C 系で粒子 A が x' 軸に初めて戻ってくるときの時刻 $t'(> 0)$ と座標 x' を求めよ。