

平成24年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻 博士課程入学試験

物 理 学

平成24年2月1日(水) 9時30分～11時30分

問題は全部で3問あります。

第1～3問をそれぞれ別の答案用紙(計3枚)に解答し、全ての答案用紙に氏名、受験番号および問題番号を記入してください。

第1問

1次元ポテンシャル中の質量 m , エネルギー E の粒子の運動を考える。

1. 図1-1のようなポテンシャル $V(x)$ に左から粒子が入射とする。ここで $E > V_0, V_0 > 0$ とする。時間を含まないシュレディンガー方程式を書け。このとき波動関数 $\psi(x)$ の一般解は、以下の形で与えられる。 k_1, k_2, k_3 を求めよ。

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{-ik_1 x} & (x < 0) \\ B_1 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} & (0 < x < a) \\ C_1 e^{ik_3 x} & (x > a) \end{cases}$$

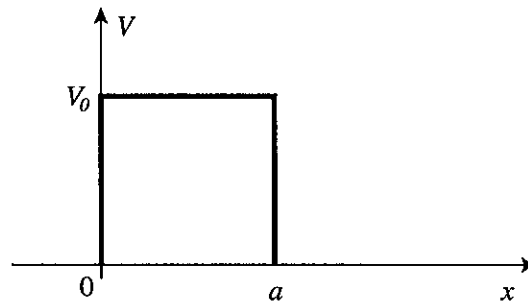


図1-1

2. $x = 0, x = a$ における $\psi(x)$ の境界条件を k_1, k_2 を用いてそれぞれ示せ。
3. $\psi(x)$ を, C_1, k_1, k_2 を用いて表せ。
4. $\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} a = n\pi$ (n は任意の正の整数) のとき, 反射率 R が 0 となることを示せ。

次に図1-2のような $V(x)$ に左から粒子が入射とする。

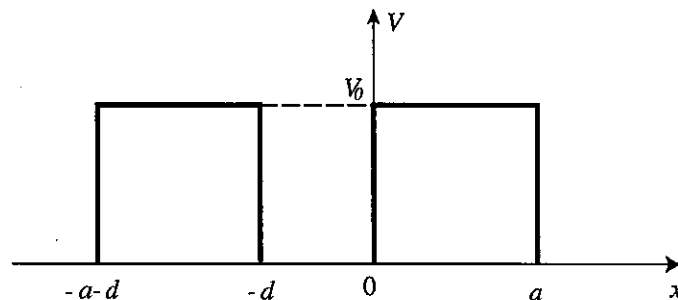


図1-2

5. $\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} a = n\pi$ (n は任意の正の整数) を満たす時, 反射率 R' はいくらか? また, その物

理的な解釈を簡単に述べよ。

6. $\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}a = \frac{\pi}{2}$ のときの反射率 R' を考える。まず、 $d=0$ のとき、 $R'=0$ となることを示せ。次に、 $d = \frac{n\pi}{k_1}$ (n は任意の正の整数) を満たす時、 $R'=0$ となることを示せ。また、その物理的な解釈を簡単に述べよ。

第2問

独立した N 個の大きさ $S = 1/2$ の電子スピンからなる系が、大きさ $H (> 0)$ の一様な磁場中に置かれ、温度 T の熱浴に接している。それぞれの電子のゼーマン・エネルギーは、 S_z の固有値 m_S を用いて $2\mu_B H m_S$ で与えられるとする。ここで、 μ_B は電子のボーア磁子である。以下の問に答えよ。

1. この電子スピン系の自由エネルギーを温度と磁場の関数 $F(T, H)$ として求めよ。
2. この電子スピン系の内部エネルギー $U(T, H)$ を求め、 H の関数として概略を図示せよ。
3. $U(T, H)$ を T の関数として概略を図示せよ。

以下では、ゼーマン・エネルギーは熱エネルギーに比べて十分小さいとする。

4. この電子スピン系のエントロピー $S(T, H)$ を、 H に関して2次の項まで求めよ。
5. 磁場の大きさを H_0 から $H_1 (> H_0)$ まで準静的に増加させた。このとき、電子スピン系は熱を吸収したか、放出したか？ また、放出あるいは吸収した熱量の絶対値を H_0, H_1, T を用いて表わせ。
6. 設問5の過程で磁場が電子スピン系になした仕事はいくらか？
7. 次に、電子スピン系と熱浴の接触を断ち、磁場を H_1 から H_0 まで準静的に減少させた。このとき、電子スピン系の温度は上昇したか、下降したか？

第3問

電場ベクトルを \vec{E} 、電束密度ベクトルを \vec{D} 、磁場ベクトルを \vec{H} 、磁束密度ベクトルを \vec{B} 、電流密度を \vec{j} 、電荷密度を ρ 、誘電率を ϵ 、透磁率を μ としたとき、マックスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

と書ける。 $\epsilon(>0), \mu(>0)$ が一定の誘電体の中を通過する電磁波について考える。ここで、誘電体の内部では ρ と \vec{j} はともに 0 とする。以下の問に答えよ。答えだけでなく、途中の考え方も記述すること。

1. z 軸の正方向に伝播する平面電磁波について、電場 \vec{E} を (E_x, E_y, E_z) 、磁束密度 \vec{B} を (B_x, B_y, B_z) としたとき、マックスウェル方程式を E_x, E_y, E_z および B_x, B_y, B_z の方程式として書き下せ。
2. E_x の満たす波動方程式を導け。
3. 設問 2 で求めた微分方程式の一般解は任意の関数 f, g を用いて

$$E_x(z, t) = f(t - \alpha z) + g(t + \alpha z)$$

とあらわせることを用い α を求めよ。また、この電磁波の位相速度を ϵ と μ を用いて表せ。

次に、二つの異なる誘電体が図 3-1 のように $x-y$ 平面 ($z=0$) で接している場合について考える。二つの誘電体が占める領域をそれぞれ領域 I ($z < 0$) および領域 II ($z > 0$) とし、領域 I の誘電率、透磁率、電場ベクトル、磁束密度ベクトルをそれぞれ $\epsilon_1, \mu_1, \vec{E}_1, \vec{B}_1$ とし、領域 II のそれらをそれぞれ $\epsilon_2, \mu_2, \vec{E}_2, \vec{B}_2$ とする。

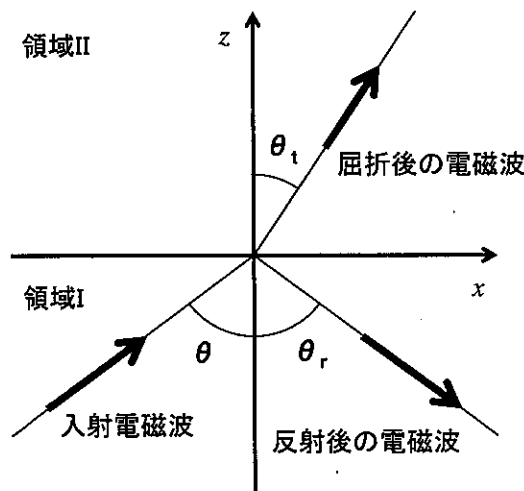


図 3-1

4. 図 3-1 のように電磁波が領域 I と II の境界面 ($z = 0$) に角度 θ で入射するとき、境界面上で $\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{E}_2, \vec{B}_2$ が満たすべき条件を、境界面に対し法線方向と接線方向それぞれについて示せ。
5. 電磁波の入射角を θ , 屈折角を θ_t としたとき, θ と θ_t の関係を $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ を用いてあらわせ。
6. 入射角 θ が 0 の時の反射率および透過率を求めよ。